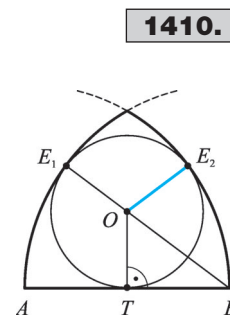
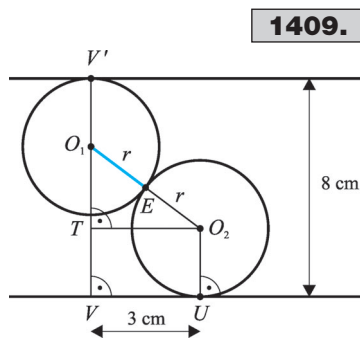
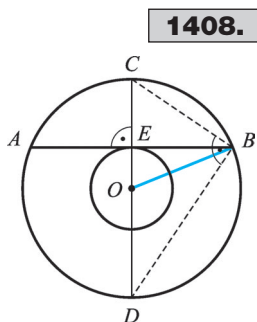


I

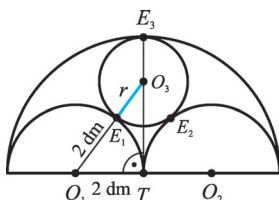


1408. $AE = EB = 2$ m; $EC = 0,8$ m. A Thalész-tétel szerint $CBD\Delta$ derékszögű \Rightarrow alkalmazható a magasságtétel: $BE^2 = CE \cdot ED$. Az adatokat behelyettesítve: $2^2 = 0,8(r_1 + r_2) \Rightarrow r_2 = 5 - r_1$. A Pitagorasztétel az OEB derékszögű háromszögben: $2^2 + r_1^2 = r_2^2$. A két összefüggésből: $r_1 = 2,1$ m és $r_2 = 2,9$ m.

1409. O_1O_2 derékszögű háromszögben: $O_2T = 3$ cm; $O_1T = 8 - 2r$; $O_1O_2 = 2r$. A Pitagorasztétel: $3^2 + (8 - 2r)^2 = (2r)^2 \Rightarrow r \approx 2,28$ cm.

1410. Felhasználjuk: Érintő körök középpontjai és érintési pontja egy egyenesen vannak. Egyenest érintő kör érintési pontba húzott sugara merőleges az egyenesre. OTB derékszögű háromszögben: $OT = r$; $OB = 60 - r$; $TB = 30$. Pitagorasztétel az OTB -ben: $30^2 + r^2 = (60 - r)^2 \Rightarrow r = 22,5$ cm.

1411. Felhasználjuk: Érintő körök érintési pontja és középpontjaik egy egyenesen vannak. Az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintő egyenesre. O_1TO_3 derékszögű háromszögben: $O_1T = 2$ dm; $O_3T = 4$ dm $- r$; $O_1O_3 = 2$ dm $+ r$. A Pitagorasztétel: $2^2 + (4 - r)^2 = (2 + r)^2 \Rightarrow r = \frac{4}{3}$ dm $\approx 1,33$ dm.

1411.

1412. Felhasználjuk: Érintő körök érintési pontja és középpontjaik egy egyenesen vannak. Az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintő egyenesre.

AO_3T derékszögű háromszögben: $AO_3 = R - r$; $AT = \frac{R}{2}$.

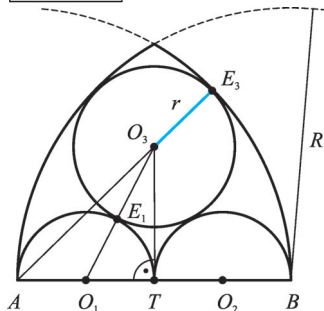
A Pitagorasztétel: $O_3T^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 = (R - r)^2$. O_1O_3T derékszögű

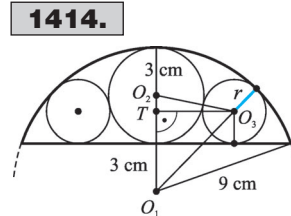
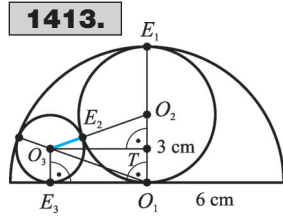
háromszögben: $O_1O_3 = r + \frac{R}{4}$; $O_1T = \frac{R}{4}$.

A Pitagorasztétel: $O_3T^2 + \left(\frac{R}{4}\right)^2 = \left(r + \frac{R}{4}\right)^2$.

A két összefüggésből: $(R - r)^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \left(r + \frac{R}{4}\right)^2 - \left(\frac{R}{4}\right)^2$.

A megfelelő algebrai átalakítások után: $r = \frac{3R}{10}$.

1412.



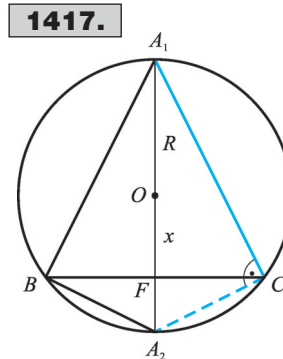
1413. Felhasználjuk: Érintő körök érintési pontja és középpontjaik egy egyenesen vannak. Az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintő egyenesre. Legyen O_3T merőleges O_1E_1 -re. $O_1E_3O_3$ derékszögű háromszögben: $O_3E_3 = r$; $O_1O_3 = 6 - r$. A Pitagorasz-tétel: $O_1E_3^2 + r^2 = (6 - r)^2$. O_3TO_2 derékszögű háromszögben: $O_3T = O_1E_3$; $O_2T = 3 - r$; $O_2O_3 = 3 + r$. A Pitagorasz-tétel: $O_3T^2 + (3 - r)^2 = (3 + r)^2 \Rightarrow O_1E_3^2 + (3 - r)^2 = (3 + r)^2$. A két összefüggésből: $(6 - r)^2 - r^2 = (3 + r)^2 - (3 - r)^2$. A megfelelő algebrai átalakítások után: $r = 1,5$ cm.

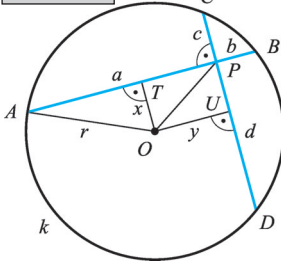
1414. Felhasználjuk: Érintő körök érintési pontja és középpontjaik egy egyenesen vannak. Az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintő egyenesre. O_1TO_3 derékszögű háromszögben: $O_1O_3 = 9 - r$; $O_1T = 3 + r$. A Pitagorasz-tétel: $O_3T^2 + (3 + r)^2 = (9 - r)^2$. O_2TO_3 derékszögű háromszögben: $O_2O_3 = 3 + r$; $O_2T = 3 - r$. A Pitagorasz-tétel: $O_3T^2 + (3 - r)^2 = (3 + r)^2$. A két összefüggésből: $(9 - r)^2 - (3 + r)^2 = (3 + r)^2 - (3 - r)^2$. A megfelelő algebrai átalakítások után: $r = 2$ cm. Két ilyen kör van.

1415. A háromszög területe: $T = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{b \cdot m_b}{2}$. Az adatokat a terület összefüggésben felhasználva: $3a = 4b$. Pitagorasz-tétel az AFC derékszögű háromszögben: $3^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2$. Az aláhúzott összefüggést felhasználva: $3^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}a\right)^2$. A megfelelő algebrai átalakítások után: $a = \sqrt{28,8} \approx 5,37$ cm az alap. $b = \frac{3}{4}a = \frac{3}{4}\sqrt{28,8} \approx 4,02$ cm a szár.

1416. A Pitagorasz-tétel az AFC derékszögű háromszögben: $m_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2$. Az adatokat behelyettesítve: $b = 25$ cm. A háromszög területe: $T = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{b \cdot m_b}{2}$. Az adatokkal: $\frac{30 \cdot 20}{2} = \frac{25 \cdot m_b}{2} \Rightarrow m_b = 24$ cm a szárhoz tartozó magasság.

1417. A Thalész-tételt felhasználva: $A_1CA_2 \sphericalR = 90^\circ$. Magasságtétel az $A_1CA_2\Delta$ -re: $CF_2^2 = A_1F \cdot FA_2$. Számadatokkal: $4^2 = (5 + x)(5 - x) \Rightarrow x = 3$ cm. Két háromszög felel meg a feltételeknek: $A_1BC\Delta$ -ben $A_1F = R + x = 8$ cm. A Pitagorasz-tétel az A_1FC derékszögű háromszögre: $A_1C^2 = 8^2 + 4^2 \Rightarrow A_1C = \sqrt{80} \approx 8,94$ cm. $A_2BC\Delta$ -ben $A_2F = R - x = 2$ cm. A Pitagorasz-tétel az A_2FC derékszögű háromszögre: $A_2C^2 = 2^2 + 4^2 \Rightarrow A_2C = \sqrt{20} \approx 4,47$ cm.



1418.

1418. Állítás: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \text{állandó}$. Bizonyítás: $d(O; AB) = d(O; T) = x$ és $d(O; CD) = d(O; U) = y$. Pitagorasz tétele az $AOT\Delta$ -re: $r^2 = AT^2 + TO^2$ és $AT = \frac{a+b}{2}$; $TO = x \Rightarrow r^2 = \frac{(a+b)^2}{4} + x^2 \otimes$. Pitagorasz tétele az $OU\Delta$ -re: $r^2 = OU^2 + UD^2$ és $UD = \frac{d+c}{2}$; $OU = y \Rightarrow r^2 = \frac{(d+c)^2}{4} + y^2 \oplus$. $\otimes + \oplus$: $2r^2 = \frac{(a+b)^2 + (c+d)^2}{4} + x^2 + y^2 \Rightarrow 8r^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ab+dc) + 4x^2 + 4y^2$. A szelődarabok szorzatára tanult tétel szerint $cd = ab = (r - OP)(r + PO) = r^2 - OP^2$. Ezt felhasználva: $8r^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2 \cdot 2 \cdot (r^2 - OP^2) + 4x^2 + 4y^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 4r^2 - 4OP^2 + 4OP^2 \Rightarrow 4r^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, tehát $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \text{állandó}$.

1419. $BC = AF \Rightarrow \sphericalangle BAC \sphericalangle$ hegyesszög $\Rightarrow O$ az $ABC \sphericalangle$ belső pontja. OFC derékszögű háromszögben: $OF = 6 - r$; $FC = 3$; $OC = r$. A Pitagorasz-tétel: $(6 - r)^2 + 3^2 = r^2$. A megfelelő algebrai átalakítások után: $r = \underline{\underline{3,75 \text{ cm}}}$.

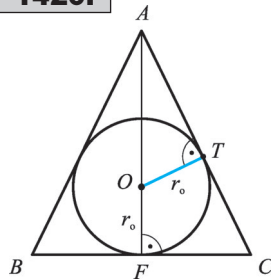
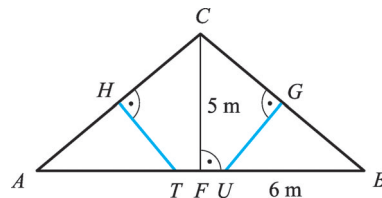
1420. Felhasználjuk: $T_\Delta = r_0 s$, ahol s a félkerület. Külső pontból a körhöz húzott érintő szakaszok egyenlők: $CF = CT = 15 \text{ cm} \Rightarrow AT = AC - CT = 39 - 15 = 24 \text{ cm}$. A Pitagorasz-tétel az AFC derékszögű háromszögre: $AF^2 + 15^2 = 39^2 \Rightarrow AF = 36 \text{ cm}$. A háromszög területe:

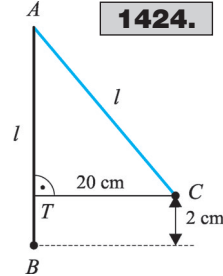
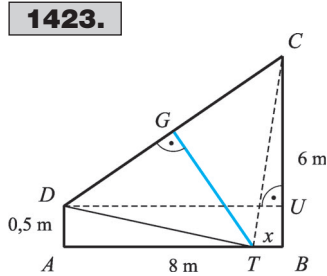
$$T_\Delta = \frac{30 \cdot 36}{2} = \frac{30 + 2 \cdot 39}{2} r_0 \Rightarrow r_0 = \underline{\underline{10 \text{ cm}}}$$

1421. Az 1420. ábra jelöléseit használjuk. Külső pontból a körhöz húzott érintő szakaszok: $CF = CT = 30 \text{ cm}$. $AO > OF \Rightarrow AO : OF = 17 : 15 \Rightarrow AO = 17x$; $OF = OT = r_0 = 15x$.

$OTA\Delta \sim CFA\Delta$, mert szögeik páronként egyenlők $\Rightarrow \lambda = \frac{OT}{FC} = \frac{OA}{AC} \Rightarrow \frac{15x}{30} = \frac{17x}{AC} \Rightarrow AC = 34 \text{ cm} \Rightarrow AT = 4 \text{ cm}$. A Pitagorasz-tétel az OTA derékszögű háromszögre: $(17x)^2 = (15x)^2 + 4^2 \Rightarrow x = 0,5 \text{ cm}$. $r_0 = 15x = \underline{\underline{7,5 \text{ cm}}}$ a beírt kör sugara.

1422. A Pitagorasz-tétel a BFC derékszögű háromszögben: $BC^2 = 5^2 + 6^2 \Rightarrow BC = \sqrt{61} \text{ m} \Rightarrow CG = GB = 0,5\sqrt{61} \text{ m}$. $BFC\Delta \sim BGU\Delta$, mert egy szögük közös, egy szögük 90° : $\frac{GU}{GB} = \frac{CF}{BF} \Rightarrow GU = \frac{5\sqrt{61}}{12} \approx 3,25 \text{ m}$.

1420.**1422.**



1423. Legyen DU párhuzamos AB -vel. DUC derékszögű háromszögben: $DU = 8$ m; $UC = BC - AD = 5,5$ m. A Pitagorasz-tétel a $DUC\Delta$ -ben: $8^2 + 5,5^2 = DC^2 \Rightarrow DC \approx 9,71$ m $\Rightarrow DG = GC = 4,86$ m. A Pitagorasz-tétel a $TBC\Delta$ -ben: $x^2 + 6^2 = TC^2$. A Pitagorasz-tétel a $TAD\Delta$ -ben: $(8 - x)^2 + 0,5^2 = TD^2 = TC^2$. A két összefüggésből: $x \approx 1,77$ m $\Rightarrow TC^2 = 39,12$. A Pitagorasz-tétel a CGT derékszögű háromszögben: $GC^2 + GT^2 = CT^2$. A fent kiszámolt adatokat felhasználva: $GT \approx 3,94$ m.

1424. ATC derékszögű háromszögben: $AT = l - 2$ cm; $TC = 20$ cm; $AC = l$. Pitagorasz-tétel: $(l - 2)^2 + 20^2 = l^2 \Rightarrow l = 101$ cm.

1425. Mivel $AB > AC$, BC , az m_c magasság talppontja az AB szakasz belső pontja. A Pitagorasz-tétel az ATC derékszögű háromszögre: $x^2 + m_c^2 = 25^2$. A Pitagorasz-tétel a BTC derékszögű háromszögre: $(63 - x)^2 + m_c^2 = 52^2$. A két összefüggésből: $25^2 - x^2 = 52^2 - (63 - x)^2 \Rightarrow x = 15$ cm $\Rightarrow m_c = 20$ cm.

1426. A leghosszabb oldalhoz tartozó magasság talppontja az oldal belső pontja. A Pitagorasz-tétel az ATB és az ATC derékszögű háromszögekre: $x^2 + m_a^2 = c^2$, illetve $(a - x)^2 + m_a^2 = b^2 \Rightarrow x = \frac{c^2 - b^2 + a^2}{2a}$ és $m_a^2 = c^2 - \left(\frac{c^2 - b^2 + a^2}{2a}\right)^2$. A háromszög területe: $T_\Delta = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{b \cdot m_b}{2} = \frac{c \cdot m_c}{2} \Rightarrow m_b = \frac{a}{b} \cdot m_a$ és $m_c = \frac{a}{c} \cdot m_a$. Az adatok behelyettesítése után: $m_a = 12$ cm; $m_b = 12,6$ cm; $m_c = 19,38$ cm.

1427. Legyen a trapéz hosszabb alapja AB , rövidebb alapja DC , a D -ből induló magasság talppontja T . Legyen DB' párhuzamos a BC szárral $\Rightarrow AB' = 10$ cm. A Pitagorasz-tétel az ATD és a $B'TD$ derékszögű háromszögekre: $x^2 + m^2 = 9^2$, illetve $(10 + x)^2 + m^2 = 17^2 \Rightarrow x = 5,4$ cm és $m = 7,2$ cm.

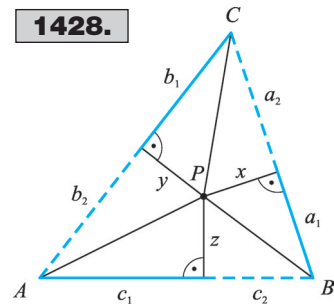
1428. Pitagorasz tételének többszöri alkalmazásával:

$$a_1^2 = BP^2 - x^2; \quad a_2^2 = CP^2 - x^2; \quad b_1^2 = CP^2 - y^2; \quad b_2^2 = AP^2 - y^2; \quad c_1^2 = AP^2 - z^2; \quad c_2^2 = BP^2 - z^2.$$

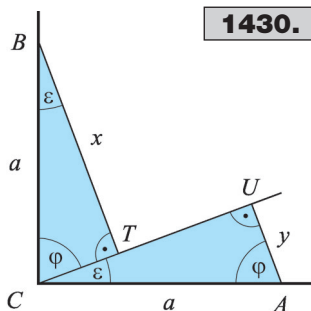
A fentiekből következik, hogy $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = AP^2 + BP^2 + CP^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2$.

1429. A derékszögű háromszög oldalaira Pitagorasz tételét felírva: $a^2 + b^2 = c^2$.

A derékszögű háromszög területét kétféleképpen felírva: $\frac{ab}{2} = \frac{cm_c}{2} \Rightarrow 2ab = 2cm_c$.



I

**1430.**

A fentiekből következik, hogy $a^2 + b^2 + 2ab + m_c^2 = c^2 + 2m_c + m_c^2 \Rightarrow (a+b)^2 + m_c^2 = (c+m_c)^2$, azaz $a+b$; m_c és $c+m_c$ szakaszok derékszögű háromszöget alkotnak, Pitagorasz tételének megfordítása miatt.

1430. $\varepsilon + \varphi = 90^\circ$. $AUC\Delta \cong CTB\Delta$, mert szögeik ε , φ , 90° és átfogójuk $a \Rightarrow CT = y$ és $CU = x$. Pitagorasz tételét alkalmazva az egybevágó derékszögű háromszögekre: $x^2 + y^2 = a^2$, tehát $x^2 + y^2$ csak a -tól függ.

1431. Legyen $T \in BC$ a magasság talppontja. ABT derékszögű háromszögben $a^2 = m^2 + c^2$ és ACT derékszögű háromszögben $b^2 = m^2 + d^2 \Rightarrow a^2 + 2b^2 = m^2 + c^2 + 2(m^2 + d^2) = 3m^2 + 2d^2 + c^2$, tehát igaz az állítás.

1432. CDO derékszögű háromszögben a hegyesszögek 30° és 60° , ezért $CD = \frac{r}{\sqrt{3}} \Rightarrow BD = BC - CD = 3r - \frac{r}{\sqrt{3}}$. Pitagorasz tétele az ADB derékszögű háromszögre:

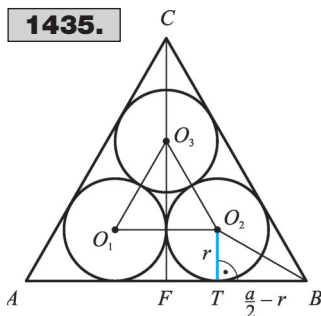
$$(2r)^2 + \left(3r - \frac{r}{\sqrt{3}}\right)^2 = AB^2 \Rightarrow AB = \sqrt{\frac{40 - 6\sqrt{3}}{3}} \cdot r \approx 3,1415r \approx k_{\text{félkör}}$$

1433. Legyen O a kör középpontja, A az egyik külső négyzet csúcsa, T az O -ból a négyzet oldalegyenesére bocsátott merőleges talppontja. OTA derékszögű háromszögben: $OT = \frac{a}{2}$;

$$AT = \frac{3}{2}a; OA = r. \text{ A Pitagorasz-tétel: } \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}a\right)^2 = r^2 \Rightarrow a = \frac{\sqrt{10}}{5}r.$$

1434. Felhasználjuk: Érintő körök érintési pontja és középpontjaik egy egyenesen vannak. $\Rightarrow O_3O = r - r'$. A 120° -os forgásszimmetria miatt $O_1O_2O_3\Delta$ szabályos, középpontja O , ami súlypont is. $\Rightarrow O_3E_3 = 1,5O_3O = 1,5(r - r')$. A Pitagorasz-tétel az $O_1E_3O_3$ derékszögű háromszögben: $(r')^2 + (1,5(r - r'))^2 = (2r')^2 \Rightarrow r' = (2\sqrt{3} - 3)r$.

1435. ABC szabályos háromszögben $CF = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. A szögzárakkal való érintkezés miatt BO_2 szögfelező $\Rightarrow TBO_2 \sphericalangle = 30^\circ$. $O_2TB\Delta \sim BFC\Delta$, mert szögeik páronként egyenlők $\Rightarrow \frac{\frac{a}{2} - r}{r} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} \Rightarrow r = \frac{a(\sqrt{3} - 1)}{4}$.

**1435.**

1436. Legyenek a szabályos nyolcszög szomszédos csúcsai A_1, A_2, A_3 ; $A_1A_3 \perp A_2O$ és $A_1A_3 \cap A_2O = F \Rightarrow A_1OA_3 \sphericalangle = 90^\circ$.

$A_1A_3 = r\sqrt{2} \Rightarrow A_1F = A_3F = OF = \frac{r\sqrt{2}}{2}$. A_1FA_2 derékszögű

háromszögben $A_2F = r - \frac{r\sqrt{2}}{2}$ és $A_1F = \frac{r\sqrt{2}}{2}$. A Pitagorasz-tétel: $A_1A_2^2 = \left(r - \frac{r\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{r\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow A_1A_2 = r\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ a szabályos nyolcszög oldala.

1437. Legyenek a szabályos tizenkétszög szomszédos csúcsai A_1, A_2, A_3 ; $A_1A_3 \perp OA_2$ és $A_1A_3 \cap OA_2 = F \Rightarrow A_1OA_3 \sphericalangle = 60^\circ$. $A_1A_3 = r \Rightarrow OF = \frac{r\sqrt{3}}{2}$. A_1FA_2 derékszögű háromszögben $A_2F = r - \frac{r\sqrt{3}}{2}$ és $A_1F = \frac{r}{2}$. A Pitagorasz-tétel: $A_1A_2^2 = \left(r - \frac{r\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 \Rightarrow A_1A_2 = r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ a szabályos tizenkétszög oldala.

1438. Szabályos hatszögben $AOB\Delta$ szabályos. Legyen F a BO szakasz felezőpontja. $\Rightarrow AF = AB \frac{\sqrt{3}}{2} = 2,5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$; $2AF = x' = 2,5 \cdot \sqrt{3} \approx 4,33 \text{ cm} \Rightarrow x = x' + 2 \cdot 0,05 \approx \underline{4,43 \text{ cm}}$.

1439. Legyen a négyzet középpontja K , P -ből az AC átlóra bocsátott merőleges talppontja T , a BD -re bocsátott merőleges talppontja U . $ABCD$ négyzetben $BK = \frac{a}{\sqrt{2}}$. $APT\Delta \sim ABK\Delta$, mert

szögeik páronként egyenlők $\Rightarrow \underline{PT = \frac{b}{\sqrt{2}}}$. $BUP\Delta \sim BKA\Delta$, mert szögeik páronként egyenlők $\Rightarrow \underline{PU = \frac{a - b}{\sqrt{2}}}$.

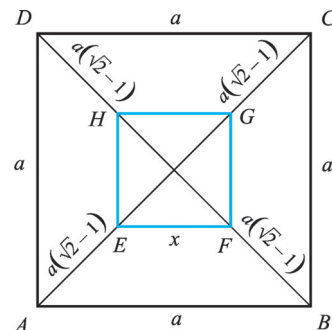
1440. $ABD\Delta$ egyenlő szárú derékszögű $\Rightarrow AD = a\sqrt{2}$. Az 1437. feladatban láttuk: az r sugarú körbe írt szabályos tizenkétszög oldala $r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$. CD egy a sugarú körbe írt szabályos tizenkétszög oldala, mert $CB = DB = a$ és $CDB \sphericalangle = 30^\circ \Rightarrow CD = a\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

1441. a) A belső $EFGH$ négyszögben az átlók merőlegesen felezik egymást és egyenlő hosszúak, tehát az $EFGH$ négyszög négyzet.

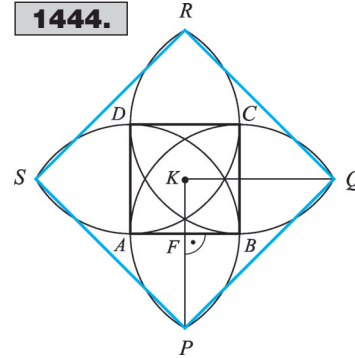
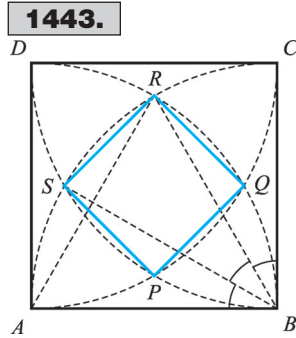
b) Legyen $EH = x$! Az átló az oldal $\sqrt{2}$ -szerese:
 $EG = a\sqrt{2} - 2a(\sqrt{2} - 1) = a(2 - \sqrt{2}) = \sqrt{2} \cdot x \Rightarrow x = a(\sqrt{2} - 1)$.

1442. 1. eset: a metszéspont belső pont. $ABE\Delta$ szabályos, azaz $EB = AE = a$. $EB = BC$ és $EBC \sphericalangle = 30^\circ \Rightarrow EC$ egy a sugarú körbe írt szabályos tizenkétszög oldala. Az 1437. feladat alapján $EC = DE = \underline{a\sqrt{2 - \sqrt{3}}}$.

1441.



I



2. eset: a metszéspont külső pont. $ABE'\Delta$ szabályos, azaz $E'B = AE' = a$. CFE' derékszögű háromszögben $CF = \frac{a}{2}$ és $FE' = a + \frac{a\sqrt{3}}{2}$. A Pitagorasz-tétel: $E'C^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(a + \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow E'C = DE' = a\sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

1443. A 90° -os forgásszimmetria miatt $SP = PQ = QR = SR \Rightarrow PQRS$ négyzet. $ABR\Delta$ a oldalú szabályos háromszög $\Rightarrow ABR\angle = 60^\circ \Rightarrow RBC\angle = 30^\circ$. $SBC\Delta$ a oldalú szabályos háromszög $\Rightarrow SBC\angle = 60^\circ \Rightarrow ABS\angle = 30^\circ \Rightarrow SBR\angle = 30^\circ$. SR egy a sugarú körbe írt szabályos tizenkétszög oldala. Az 1437. feladat szerint $SR = a\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

1444. A 90° -os forgásszimmetria miatt $SP = PQ = QR = SR \Rightarrow PQRS$ négyzet. $ABP\Delta$ szabályos $\Rightarrow PF = a\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow KP = \frac{a}{2} + a\frac{\sqrt{3}}{2}$. $KPQ\Delta$ egyenlő szárú derékszögű $\Rightarrow PQ = KP \cdot \sqrt{2} = \left(\frac{a}{2} + a\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \sqrt{2} = a\sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

1445. A megadott adatokkal m_c magasság T talppontja az AB szakasz belső pontja. Legyen F az AB szakasz felezőpontja. CTF derékszögű háromszögre Pitagorasz tétele: $TF^2 + 12^2 = 13^2 \Rightarrow TF = 5$ cm $\Rightarrow AT = AF - TF = 25$ cm és $BT = BF + TF = 35$ cm. ATC derékszögű háromszögre Pitagorasz tétele: $25^2 + 12^2 = b^2 \Rightarrow b = \sqrt{769} \approx 27,73$ cm. BTC derékszögű háromszögre Pitagorasz tétele: $35^2 + 12^2 = c^2 \Rightarrow c = 37$ cm.

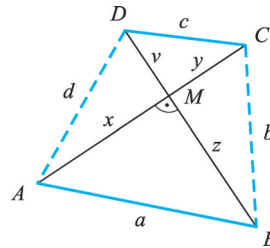
1446. Legyenek $F \in BC$, $G \in AC$ és $H \in AB$ az oldalfelező pontok. Az ABC derékszögű háromszögben $a^2 + b^2 = c^2$ és a CH súlyvonalra $s_c = \frac{c}{2}$ Thalész tétele szerint. A CGB derékszögű

háromszögre Pitagorasz tétele: $s_b^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + a^2$. Az AFC derékszögű háromszögre Pitagorasz

tétele: $s_a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2$. $s_a^2 + s_b^2 + s_c^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + a^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}(a^2 + b^2) + \frac{c^2}{4} = \frac{5}{4}c^2 + \frac{c^2}{4} = \frac{3}{2}c^2$ bármely c átfogójú derékszögű háromszögben.

1447. Pitagorasz tételét alkalmazva a derékszögű háromszögekre: $AMB\Delta$ -ben $a^2 = x^2 + z^2$; $BMC\Delta$ -ben $b^2 = z^2 + y^2$; $CMD\Delta$ -ben $c^2 = y^2 + v^2$; $DMA\Delta$ -ben $d^2 = v^2 + x^2$. A fentiekből következik, hogy $a^2 + c^2 = x^2 + y^2 + v^2 + z^2 = b^2 + d^2$, tehát igaz az állítás.

1447.



1448. 1. eset: a négyszög nem téglalap. Legyen DT és CU az AB egyenesre merőleges.

$DT = CU$; $AT = BU$; $AU = AB + BU$; $BT = |AB - AT|$. A Pitagorasz-tétel az ATD derékszögű háromszögre: $AT^2 + DT^2 = AD^2$ (I.). A Pitagorasz-tétel az AUC derékszögű háromszögre:

$AU^2 + CU^2 = AC^2$, ami a feltételek felhasználásával: $(AB + AT)^2 + DT^2 = AC^2$ (II.). A Pitagorasz-tétel a BTD derékszögű háromszögre: $|AB - AT|^2 + DT^2 = BD^2$ (III.). II. + III. $\Rightarrow AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AT^2 + DT^2) = 2(AB^2 + AD^2)$, ami azt jelenti, hogy $e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$.

2. eset: a négyszög téglalap. Közvetlenül adódik, hogy $e^2 = f^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$.

1449. Felhasználjuk, hogy a paralelogramma átlóinak négyzetösszege egyenlő az oldalak négyzetösszegével, azaz $e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$. a) $e^2 + 7^2 = 2(6^2 + 10^2) \Rightarrow e = \sqrt{223} \approx 14,93$ cm.

b) $12^2 + 18^2 = 2(a^2 + 9^2) \Rightarrow a = \sqrt{153} \approx 12,37$ cm. c) $40^2 + 74^2 = 2(a^2 + 51^2) \Rightarrow a = \sqrt{937}$. Legyen $DT \perp AB$. Pitagorasz tétele az ATD és a BTD derékszögű háromszögekre:

$$AT^2 + m_b^2 = 937 \text{ és } (51 - AT)^2 + m_b^2 = 40^2 \Rightarrow AT = 19 \Rightarrow m_b = 24 \text{ cm.}$$

1450. Legyenek EG és HF a középvonalak. Felhasználjuk, hogy a négyszög oldalfelező pontjai olyan paralelogrammát határoznak meg, aminek átlói a négyszög középvonalai, oldalai pedig a négyszög átlóinak felével egyenlők. A paralelogramma átlóinak négyzetösszege egyenlő

$$\text{az oldalak négyzetösszegével, azaz } EG^2 + HF^2 = 2HE^2 + 2EF^2 = 2\left(\frac{BD}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{AC}{2}\right)^2 = \frac{BD^2}{2} +$$

$$+\frac{AC^2}{2} \Rightarrow BD^2 + AC^2 = 2(EG^2 + HF^2). \text{ Megjegyzés: az állítás konkáv négyszögre is igaz.}$$

1451. Legyen AB felezéspontja F , C középpontos tükörképe F -re C' .

Az $AC'BC$ paralelogramma átlóinak négyzetösszege egyenlő az oldalak négyzetösszegével, azaz

$$c^2 + (2s_c)^2 = 2(a^2 + b^2) \Rightarrow s_c^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}. \text{ a) } s_a = \frac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2}; \quad s_b = \frac{\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}}{2};$$

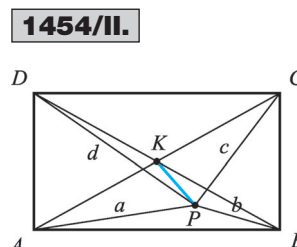
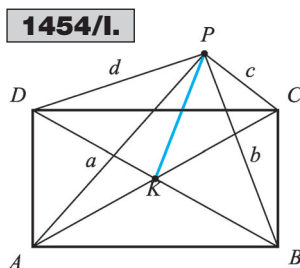
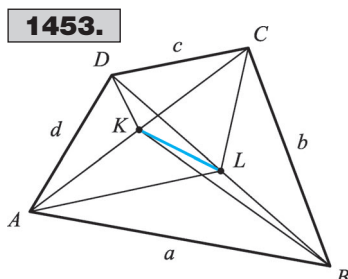
$$s_c = \frac{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{2}. \text{ b) } a = 7 \text{ cm; } b = 11 \text{ cm; } s_c = 6 \text{ cm. } c^2 + (2s_c)^2 = 2(a^2 + b^2) \Rightarrow c = \sqrt{2a^2 + 2b^2 - 4s_c^2} = 14 \text{ cm.}$$

1452. Legyen AB felezéspontja F , C középpontos tükörképe F -re C' . Az $AC'BC$ paralelogramma átlóinak négyzetösszege egyenlő az oldalak négyzetösszegével, azaz $c^2 + (2s_c)^2 =$

$$= 2(a^2 + b^2) \Rightarrow s_c^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}. \text{ Hasonlóan kaphatjuk, hogy } s_b^2 = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4} \text{ és}$$

$$s_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}. s_a^2 + s_b^2 + s_c^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} + \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4} + \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4} =$$

$$= \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2).$$



1453. Felhasználjuk, hogy az a, b, c oldalú háromszögben $c^2 + (2s_c)^2 = 2(a^2 + b^2)$. KL súlyvonal az $ALC\Delta$ -ben és a $BDK\Delta$ -ben, ezért $2(KD^2 + KB^2) = BD^2 + (2KL)^2$ és $2(LA^2 + LC^2) = AC^2 + (2KL)^2 \Rightarrow 2(KD^2 + KB^2 + LA^2 + LC^2) = BD^2 + AC^2 + 8KL^2$. DK súlyvonal az $ACD\Delta$ -ben, BK az $ABC\Delta$ -ben, CL a BCD -ben, AL pedig az $ABD\Delta$ -ben. $\Rightarrow 2(c^2 + d^2) = AC^2 + (2KD)^2$; $2(a^2 + b^2) = AC^2 + (2KB)^2$; $2(b^2 + c^2) = BD^2 + (2CL)^2$; $2(a^2 + d^2) = BD^2 + (2AL)^2 \Rightarrow 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = 2(AC^2 + BD^2) + 4(KD^2 + KB^2 + AL^2 + CL^2) = 2(AC^2 + BD^2) + 2(AC^2 + BD^2) + 16KL^2 \Rightarrow \underline{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = AC^2 + BD^2 + 4KL^2}$.

1454. A téglalap átlói felezik egymást, ezért PK súlyvonala az $ACP\Delta$ -nek és a $BPD\Delta$ -nek is. Ezért az 1451. feladatban bizonyított összefüggés szerint $2(a^2 + c^2) = AC^2 + (2PK)^2$, illetve $2(b^2 + d^2) = BD^2 + (2PK)^2$. $AC = BD$, mert az $ABCD$ téglalap átlói, így $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$.

1455. Az 1451. feladatban láttuk, hogy $2(PA^2 + PB^2) = AB^2 + (2PK)^2$, ha K az AB felezőpontja.

$$PA^2 + PB^2 = d^2 \Rightarrow AB^2 + (2PK)^2 = 2d^2 \Rightarrow PK^2 = \frac{2d^2 - AB^2}{4} \Rightarrow d(P; K) = \frac{\sqrt{2d^2 - AB^2}}{2} \text{ általánosítható.}$$

A keresett pontok rajta vannak a K középpontú, $\frac{\sqrt{2d^2 - AB^2}}{2}$ sugarú k körön. A k kör minden pontja megoldás. A keresett ponthalmaz a k kör, ha $d > \frac{AB}{\sqrt{2}}$; az AB szakasz felezőpontja, ha $d = \frac{AB}{\sqrt{2}}$ és nincs megoldás, ha $d < \frac{AB}{\sqrt{2}}$.

Területszámítás, területátalakítás és alkalmazásai

1456. $t = \underline{60 \text{ m}^2}$. **1457.** $a = \underline{2\sqrt{34} \text{ cm}}$. **1458.** Kilencszeresére nő a terület.

1459. Tizenötszörösére nőtt a terület. **1460.** $\underline{\sqrt{5} = \lambda}$. **1461.** $t = \underline{2,25 \text{ km}^2}$.

1462. $m_b = \underline{7,5 \text{ cm}}$.

1463. $K_{\text{paralelogramma}} = 2(a + b) = 48 \text{ cm}$, $m_a : m_b = 5 : 7$, $T_{\text{paralelogramma}} = a \cdot m_a = b \cdot m_b \Rightarrow b = 24 - a$, $m_b = \frac{7}{5}m_a \Rightarrow a \cdot m_a = (24 - a) \cdot \frac{7}{5}m_a \Rightarrow a = 14 \text{ cm}$ és $b = 10 \text{ cm}$.

1464. $0,5t_i = t_p \Rightarrow 0,5ab = am_a \Rightarrow 0,5b = m_a \Rightarrow A$ magasság által levágott derékszögű háromszögben az átfogó kétszerese az α -val szemközti befogónak, tehát $\alpha = 30^\circ$ és $\beta = 150^\circ$ a paralelogramma szögei.

1465. $t = \underline{28\sqrt{3} \text{ cm}^2}$. b) $t = \underline{28 \text{ cm}^2}$. c) $t = \underline{28\sqrt{2} \text{ cm}^2}$.

1466. Ha $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, akkor $m_a < b$ a magasság által levágott derékszögű háromszögben. $\Rightarrow t = am_a < ab$. Ha $\alpha = 90^\circ$, akkor $m_a = b \Rightarrow t = ab$. Tehát a téglalap területe a legnagyobb.

1467. A rombuszt e és f átlói négy egybevágó derékszögű háromszögre bontják, ezért $t = 4t_1 = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{e}{2} \cdot \frac{f}{2} = \frac{1}{2} ef$.

1468. $t = 40 \text{ cm}^2$. **1469.** $m = 9,6 \text{ cm}$. **1470.** $t = 17,5 \cdot \sqrt{11} \text{ cm}^2$. **1471.** $t = 42 \text{ cm}^2$.

1472. $t = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$. **1473.** $a = \frac{2}{\sqrt[4]{3}}$ egység. **1474.** $t = \frac{m^2}{\sqrt{3}}$. **1475.** $c = 2\sqrt{t}$.

1476. a) $t = 63\sqrt{527} \text{ cm}^2$. b) $t = 36\sqrt{145} \text{ cm}^2$. c) $t = 13\sqrt{155} \text{ cm}^2$.

1477. $\gamma = 30^\circ \Rightarrow b = 2m$; $\beta = 45^\circ \Rightarrow$ az A -ből induló magasság talppontja $(a - m)$ és m szakaszokra bontja a -t. Pitagorasz tétele: $b^2 = m^2 + (a - m)^2$, azaz $2m^2 = m^2 + (a - m)^2 \Rightarrow 2m^2 + 2am - a^2 = 0 \Rightarrow m_{1;2} = \frac{-2a \pm 2\sqrt{3}a}{4} \Rightarrow m_1 = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} a$ és $m_2 = \frac{-\sqrt{3} - 1}{2} a$, amelyek közül $m_2 < 0$, ezért nem megoldás. $t = \frac{1}{2} am = \frac{\sqrt{3} - 1}{4} a^2$.

1478. A kapott terület megegyezik az a oldalú szabályos háromszög területével, $\left(t = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \right)$, ami átdarabolással is megmutatható.

1479. $t = t_1 + 3t_2 + 3t_3$, ahol $t_1 = t_3 = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ és $t_2 = a^2$; $t = 4t_1 + 3t_2 = \sqrt{3}a^2 + 3a^2 = (\sqrt{3} + 3)a^2$.

1480. $\gamma = 60^\circ \Rightarrow m_a = \frac{\sqrt{3}}{2} b$; $t = \frac{1}{2} am_a = \frac{1}{2} a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} b = \frac{\sqrt{3}}{4} ab$.

1481. $\gamma = 120^\circ \Rightarrow \gamma' = 60^\circ \Rightarrow m_a = \frac{\sqrt{3}}{2} b$; $t = \frac{1}{2} a \cdot m_a = \frac{1}{2} a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} b = \frac{\sqrt{3}}{4} ab$.

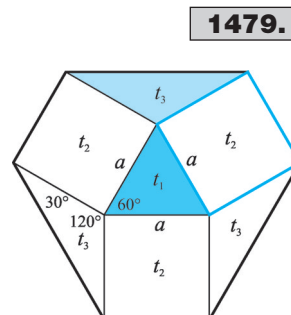
1482. $T_{\text{háromszög}} = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{b \cdot m_b}{2} \Rightarrow m_b = \frac{a}{b} \cdot m_a \Rightarrow m_b = \frac{5}{2} \text{ cm}$.

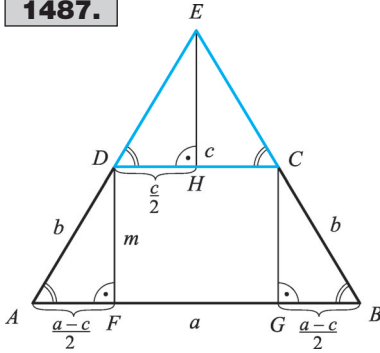
1483. $T_{\text{háromszög}} = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{b \cdot m_b}{2}$; $m_a + m_b = 14 \text{ cm} \Rightarrow 16 \cdot m_a = 12 \cdot (14 - m_a) \Rightarrow m_a = 6 \text{ cm}$ és $m_b = 8 \text{ cm}$.

1484. Ha $\alpha' = 180^\circ - \alpha$, akkor a két háromszög az A csúcsával egymás mellé tehető úgy, hogy AB oldaluk közös, C_1A , ill. C_2A oldaluk pedig A -ban egymáshoz csatlakozik. $t_{C_1AB\Delta} = \frac{1}{2} b \cdot m_b = t_{C_2AB\Delta}$. Ha $\alpha = \alpha'$, akkor a két háromszög egybevágó, tehát egyenlő területű.

1485. $t = 80 \text{ cm}^2$.

1486. $t = 16\sqrt{6} \text{ cm}^2$.



1487.

$$\mathbf{1487.} \quad \frac{c}{2} = 1 \text{ cm} = \frac{a-c}{2} \Rightarrow AFD\triangle \cong DHE\triangle \cong CHE\triangle \cong BGC\triangle \Rightarrow EH = DF = m.$$

$$\text{Pitagorasz tétele: } b^2 = m^2 + \left(\frac{a-c}{2}\right)^2 \Rightarrow m = 2\sqrt{2} \text{ cm};$$

$$t_{DEC\triangle} = \frac{1}{2} c \cdot m = 2\sqrt{2} \text{ cm}^2.$$

$$\mathbf{1488.} \quad \alpha = 45^\circ, \text{ ezért } AB = 2m + DC \Rightarrow m =$$

$$= \frac{AB - DC}{2} = 6 \text{ cm}; t = \frac{(AB + DC)m}{2} = \underline{\underline{288 \text{ cm}^2}}.$$

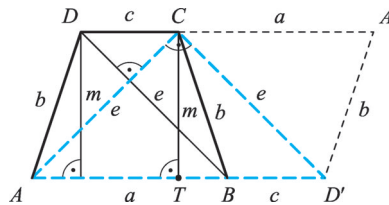
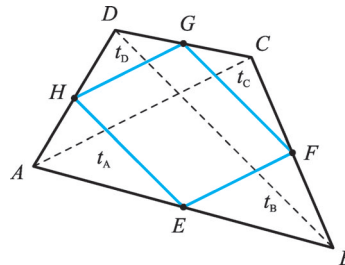
$$\mathbf{1489.} \quad \text{Legyen } x = \frac{a-c}{2}, \text{ a hosszabbik alap magasság}$$

által levágott szelete. Pitagorasz tétele $\Rightarrow e^2 - (a-x)^2 = b^2 - x^2$, azaz $39^2 - (44-x)^2 = 17^2 - x^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x = 8 \text{ m}$ és $c = 28 \text{ m}$; $t = \frac{(a+c)m}{2} = \underline{\underline{540 \text{ m}^2}}.$

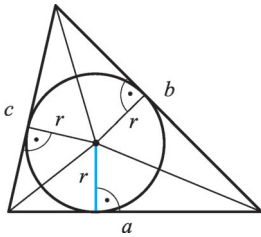
1490. $ACD\triangle$ egyenlő szárú derékszögű háromszög $\Rightarrow CT$ magasság felezi AD' -t és ACD' -et is $\Rightarrow AT = CT = TD'$; $t = \frac{(a+c)m}{2} = \frac{2m \cdot m}{2} = \underline{\underline{m^2}}.$

1491. A rövidebb alap egyik csúcsából induló magasság talppontja $\frac{a-c}{2}$ és $\left(a - \frac{a-c}{2}\right)$ szakaszokra bontja a hosszabb alapot. Az átló és a szár merőlegessége miatt a magasságtétel \Rightarrow
 $\Rightarrow m^2 = \frac{a-c}{2} \cdot \left(a - \frac{a-c}{2}\right) = 144 \text{ cm}^2 \Rightarrow m = 12 \text{ cm}$; $t = \frac{(a+c)m}{2} = \underline{\underline{216 \text{ cm}^2}}.$

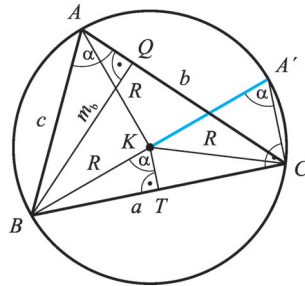
1492. HE középvonal az $ABD\triangle$ -ben $\Rightarrow t_A = \frac{1}{4}t_{ADB}$ és FG középvonal a $DCB\triangle$ -ben \Rightarrow
 $\Rightarrow t_C = \frac{1}{4}t_{DCB} \Rightarrow t_A + t_C = \frac{1}{4} \cdot (t_{ADB} + t_{DCB}) = \frac{1}{4}t$. Hasonlóan belátható, hogy $t_B + t_D =$
 $= \frac{1}{4}(t_{DAC} + t_{ABC}) = \frac{1}{4}t \Rightarrow t_{EFGH} = t - (t_A + t_B + t_C + t_D) = t - \frac{1}{2}t = \frac{1}{2}t.$

1490.**1492.**

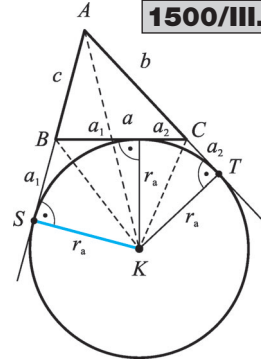
1500/I.



1500/II.



1500/III.



1493. Vegyünk fel az $ABCD$ négyszög csúcsain át az átlókkal párhuzamos egyeneseket. Ezek metszéspontjait jelöljük rendre K -, L -, M - és N -nel.

$MN \parallel AC \parallel KL$ és $NK \parallel DB \parallel ML \Rightarrow KLMN$; $PDNA$; $PDMC$; $PCLB$; $PBKA$ paralelogrammák \Rightarrow

$\Rightarrow t_{ADP} = t_{ADN}$; $t_{PDC} = t_{DMC}$; $t_{PCB} = t_{CBL}$; $t_{PAB} = t_{ABK} \Rightarrow t_{ABCD} = \frac{1}{2} t_{KLMN}$ és a paralelogramma területe csak oldalaitól (az eredeti négyszög átlóitól) és ezek szögétől függ.

1494. A négyszög csúcsain át az átlókkal húzott párhuzamosok egy téglalapot határoznak meg. $t = \frac{1}{2} t_{\text{téglalap}} = \frac{1}{2} ef = \underline{\underline{48 \text{ cm}^2}}$.

1495. Az $ABCD$ négyszög csúcsain át az átlókkal húzott párhuzamosok a $KLMN$ négyszöget határozzák meg. $t_{ABCD} = \frac{1}{2} t_{KLMN}$, ahol $KLMN$ az $AC \parallel MN \parallel KL$ és $BD \parallel NK \parallel ML$ és $AC \perp BD$ miatt téglalap $\Rightarrow t_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot KL \cdot LM = \frac{1}{2} AC \cdot BD$.

1496. $t = \underline{\underline{428 \text{ cm}^2}}$. **1497.** $t = \underline{\underline{741 \text{ m}^2}}$. **1498.** a) $t = \underline{\underline{48 \text{ cm}^2}}$; b) $t = \underline{\underline{30 \text{ cm}^2}}$; c) $t = \underline{\underline{36 \text{ cm}^2}}$.

1499. $t = \underline{\underline{14,24 \text{ m}^2}}$.

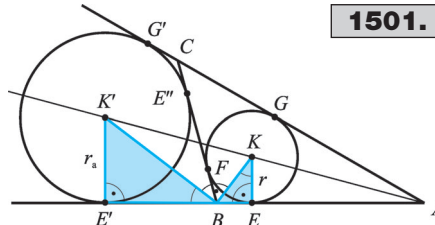
1500. a) $t = \frac{1}{2} ar + \frac{1}{2} br + \frac{1}{2} cr = \frac{1}{2} r(a + b + c) \Rightarrow r = \frac{2t}{a+b+c} \left(= \frac{t}{s} \right)$. b) $BQA\Delta \sim BCA'\Delta$,

mert szögeik egyenlők a kerületi szögek tétele miatt. $\frac{BA'}{BC} = \frac{BA}{BQ}$, azaz $\frac{2R}{a} = \frac{c}{m_b}$ és

$t = \frac{1}{2} bm_b \Rightarrow m_b = \frac{2t}{b} \Rightarrow \frac{2R}{a} = \frac{cb}{2t} \Rightarrow R = \frac{abc}{4t}$. c) $t = t_{AKS} + t_{AKT} - 2t_{KBC} = \frac{1}{2} r_a(c + a_1) + \frac{1}{2} r_a(b + a_2) - 2 \cdot \frac{1}{2} ar_a = \frac{1}{2} r_a(c + b - a) \Rightarrow r_a = \frac{2t}{c + b - a}$.

1501. $KB \perp K'B$, mert a B -nél lévő belső és külső szög szögfelezői. Emiatt: $KBE \sphericalangle + K'BE' \sphericalangle = 90^\circ$ és $KBE \sphericalangle + BKE \sphericalangle = 90^\circ \Rightarrow \underline{\underline{K'BE' \sphericalangle = BKE \sphericalangle}}$.

$K'E' \perp E'B$ és $KE \perp BE$, mert érintési pontba húzott sugarak. Az aláhúzottakból következik, hogy $K'E'B\Delta$ szögei megegyeznek $KEB\Delta$ szögeivel, azaz $K'E'B\Delta \sim KEB\Delta$.



1501.

1502. Az 1501. ábra jelöléseit használjuk. Az 1501. feladatból tudjuk, hogy $K'E'B\Delta \sim KEB\Delta$, ezért $r : BE \Rightarrow E'B : r_a$, vagyis $r \cdot r_a = EB \cdot E'B$. $E'B = E''B$ és $E''C = CG' \Rightarrow E'A + G'A = AB + BC + CA = 2s \Rightarrow E'A = s \Rightarrow \underline{E'B = s - c}$. $BE = BF$ és $FC = CG$ és $GA = AE \Rightarrow BE + CG + GA = s \Rightarrow \underline{BE = s - b}$. Az aláhúzottakból és az 1500. feladatból következik, hogy $\frac{t}{s} \cdot \frac{t}{s-a} = (s-b)(s-c)$, amiből $t = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

1503. $s = (a + b + c) : 2$ és $t = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. a) $t = \sqrt{10 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1} = \underline{\underline{10\sqrt{2} \text{ cm}^2}}$;
b) $t = \sqrt{30 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 24} = \underline{\underline{60 \text{ cm}^2}}$; c) $t = \sqrt{54 \cdot 27 \cdot 18 \cdot 9} = \underline{\underline{486 \text{ cm}^2}}$.

1504. $t = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{45 \cdot 20 \cdot 16 \cdot 9} = 360 \text{ cm}^2$. $t = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{b \cdot m_b}{2} = \frac{c \cdot m_c}{2} \Rightarrow$ A leghosszabb oldalhoz tartozik a legrövidebb magasság, így m_c a legkisebb:
 $m_c = \frac{2t}{c} = \underline{\underline{20 \text{ cm}}}$.

1505. $t_{\text{paralelogramma}} = 2t_{\text{háromszög}} = 2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = 2\sqrt{13 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 7} = \underline{\underline{2\sqrt{455} \text{ cm}^2}}$.

1506. A négyszög területét a két háromszög területének összegeként kaphatjuk meg.
 $t = \sqrt{24 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 14} + \sqrt{20 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 12} = \underline{\underline{144 \text{ cm}^2}}$.

1507. $t_{K_1K_2B} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{50 \cdot 33 \cdot 11 \cdot 6} = 330 \text{ cm}^2$. Szimmetria miatt K_1K_2 felezi AB -t; $t_{K_1K_2B} = \frac{1}{2} K_1K_2 \cdot \frac{1}{2} AB \Rightarrow AB = \frac{4t_{K_1K_2B}}{K_1K_2} = \underline{\underline{30 \text{ cm}}}$.

1508. A paralelogrammát az átlói négy egyenlő területű háromszögre bontják. $t_{ABCD} = 4t_{ABM} = 4\sqrt{s(s-a)\left(s - \frac{e}{2}\right)\left(s - \frac{f}{2}\right)}$, ahol $s = \frac{1}{2}\left(a + \frac{e}{2} + \frac{f}{2}\right) = 54 \Rightarrow t_{ABCD} = 4\sqrt{54 \cdot 3 \cdot 34 \cdot 17} = \underline{\underline{1224 \text{ cm}^2}}$.

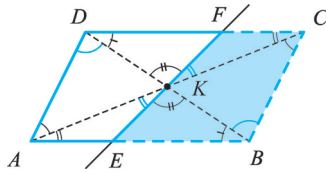
1509. Alkalmazzuk a Heron-képletet az átló által létrehozott két háromszögre! $t_{ABCD} = t_{ABC} + t_{ACD} = \sqrt{42 \cdot 16 \cdot 12 \cdot 14} + \sqrt{35 \cdot 7 \cdot 18 \cdot 10} = \underline{\underline{546 \text{ cm}^2}}$.

1510. Jelöljük x -szel a hosszabb alapnak azt a szeletét, amit a d szár végpontjából induló magasság levág belőle. Így a b szár végpontjából induló magasság által levágott szelet $(a - c - x)$. Pitagorasz tételéből következik, hogy $d^2 - x^2 = m^2 = b^2 - (a - c - x)^2$, azaz $169 - x^2 = 1369 - (40 - x)^2 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow m^2 = d^2 - x^2 \Rightarrow m = 12 \text{ cm}$; $t = \frac{(a+c)m}{2} = \underline{\underline{480 \text{ cm}^2}}$.

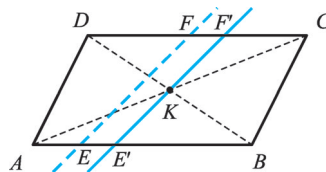
1511. $a = 9 \text{ cm}$, $b = 12 \text{ cm}$, $c = 7 \text{ cm}$ és $a + c = b + d \Rightarrow d = 4 \text{ cm}$; $t = \frac{1}{2} r (a + b + c + d) \Rightarrow r = \frac{2t}{a + b + c + d} = \underline{\underline{3 \text{ cm}}}$.

1512. $t_1 = \frac{1}{2} AF \cdot m_1$ és $t_2 = \frac{1}{2} BF \cdot m_2$; $AF = BF$, mert CF súlyvonal és $m_1 = m_2 = d(C; e(A; B))$, ezért $t_1 = t_2$.

1513.



1514.



1513. $AEK\Delta \cong CFK\Delta$ és $ADK\Delta \cong CBK\Delta$ és $DFK\Delta \cong BEK\Delta$, mert oldalai és szögeik páronként egyenlők (váltószögek, illetve csúciszögek) $\Rightarrow t_{AEK} = t_{CFK}$ és $t_{ADK} = t_{CBK}$ és $t_{DFK} = t_{BEK} \Rightarrow t_{AEFD} = t_{CBEF}$.

1514. Húzzunk az átlók metszéspontján át párhuzamost EF -fel, nyerjük az E' és F' pontokat. $t_{AEFD} = t_{CBEF}$, míg az 1513. feladatból tudjuk, hogy $t_{AE'F'D} = t_{E'BCF'}$; $t_{AEFD} = t_{AE'F'D} - t_{EE'FF'}$ és $t_{EBCF} = t_{E'BCF'} + t_{EE'FF'} = t_{AE'F'D} + t_{EE'FF'} \Rightarrow t_{EE'FF'} = 0 \Rightarrow EF \equiv E'F' \Rightarrow EF$ átmegy K -n.

1515. $r = 2$ egység. **1516.** a) $r \approx 0,8$ cm; b) $r \approx 4$ cm; c) $r \approx 2,33$ dm. **1517.** $t \approx 5,1$ cm².

1518. $k \approx 15,08$ cm. **1519.** $d \approx 4$ cm.

1520. C_1 átmérője 16 cm $\Rightarrow r_1 = 8$ cm és C_2 átmérője 12 cm $\Rightarrow r_2 = 6$ cm. $t_3 = t_1 + t_2 = r_1^2 \pi + r_2^2 \pi = (r_1^2 + r_2^2) \pi \Rightarrow r_3^2 \pi = (r_1^2 + r_2^2) \pi \Rightarrow r_3^2 = r_1^2 + r_2^2 \Rightarrow r_3 = 10$ cm $\Rightarrow C_3$ átmérője 20 cm.

1521. A négyzet oldala egyenlő a kör átmérőjével. $t_{\text{kör}} + 4,3 = t_{\text{négyzet}} \Rightarrow r^2 \pi + 4,3 = (2r)^2 \Rightarrow r^2 \approx 5 \Rightarrow t_{\text{kör}} \approx 5 \pi \approx 15,7$ cm².

1522. Legyen a külső kör sugara r_1 , a belső köré r_2 , a középköré r_3 , $K = 12$ m és $K = 2r_3 \pi \Rightarrow r_3 = 1,91$ m; $r_3 = (r_1 + r_2)$: $2 \Rightarrow r_1 + r_2 = 3,82$ m és $r_1 - r_2 = 2$ m $\Rightarrow r_1 = 2,91$ m és $r_2 = 0,91$ m. $t = r_1^2 \pi - r_2^2 \pi = (r_1^2 - r_2^2) \pi \approx 24$ cm².

1523. $AB = a$ és $AF = FB$; $t = r_1^2 \pi - r_2^2 \pi = (r_1^2 - r_2^2) \pi = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi \Rightarrow t = \frac{a^2 \pi}{4}$.

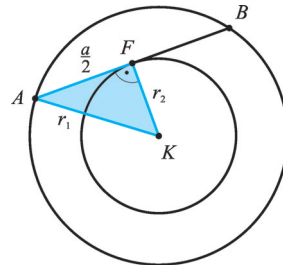
1524. a) $t = 0,1875r^2 \pi$; b) $t = 0,04375r^2 \pi$.

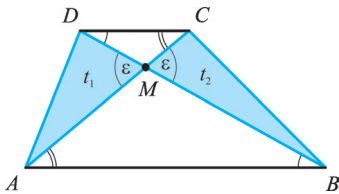
1525. a) $t = \frac{1}{4} r^2 \pi - \frac{1}{2} r^2 = \frac{r^2}{4} (\pi - 2)$; b) $t = \frac{1}{6} r^2 \pi - \frac{\sqrt{3}}{4} r^2 = r^2 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

1526. a) $r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{2} \Rightarrow r = \frac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow t = \frac{1}{3} r^2 \pi - \frac{\sqrt{3}}{4} r^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{3} \cdot \pi - \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a^2}{3} = \frac{1}{36} \cdot \frac{a^2}{3} \cdot (4\pi - 3\sqrt{3})$. b) $2r^2 = a^2 \Rightarrow r = \frac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow t = \frac{1}{4} r^2 \pi - \frac{1}{2} r^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \pi - \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{8} \cdot (\pi - 2)$.

c) $t = \frac{1}{6} a^2 \pi - \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{a^2}{12} \cdot (2\pi - 3\sqrt{3})$.

1523.



1528.

$$\mathbf{1528.} \quad t_{ADC} = \frac{DC \cdot d(A; e(D; C))}{2} = \frac{DC \cdot d(B; e(D; C))}{2} = t_{BDC}; \quad t_{ADC} = t_{AMD} + t_{DMC} \quad \text{és} \quad t_{BDC} = t_{BMC} + t_{DMC} \Rightarrow t_{AMD} = t_{BMC} \Rightarrow t_1 = t_2.$$

$$\mathbf{1529.} \quad DF = \frac{a}{2}; \quad t_{ADF} = \frac{1}{2} \cdot DF \cdot m_a = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot m_a = \frac{1}{4} a m_a = \frac{1}{4} t_{ABCD}.$$

$$\mathbf{1530.} \quad t_{ABP} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot d(P; e(A; B)) = \frac{1}{2} \cdot t_{ABCD}.$$

$$\mathbf{1531.} \quad AE = EB = \frac{1}{2} AB \quad \text{és} \quad AE \parallel DF \quad \text{és} \quad DF = FC = \frac{1}{2} DC \quad \text{és} \quad EB \parallel CF \Rightarrow AEFD \quad \text{és} \quad EBCF \quad \text{egy-}$$

bevágó paralelogrammák $\Rightarrow t_{AEFD} = t_{EBCF} = \frac{1}{2} t_{ABCD}$. Az 1530. feladatból tudjuk, hogy $t_{EPF} =$

$$= \frac{1}{2} t_{AEFD} \quad \text{és} \quad t_{EQF} = \frac{1}{2} t_{EBCF} \Rightarrow t_{EQFP} = t_{EPF} + t_{EQF} = \frac{1}{2} t_{AEFD} + \frac{1}{2} t_{EBCF} = \frac{1}{2} t_{ABCD}.$$

1532. $CF = FB$ és $f \parallel AD$. Húzzunk C-n át párhuzamost f -fel! Ez a két merőlegest H' és G' ; AB -t C' pontban metszi. $t_{AG'H'D} = t_{AC'CD}$, mert mindkettő paralelogramma, megegyezik egy-egy oldaluk és a hozzájuk tartozó magasság (AD , illetve DH'). $t_{G'GHH'} = G'H' \cdot H'H = AD \cdot H'H$ és

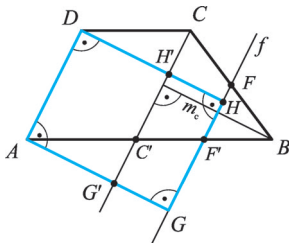
$$t_{CC'B} = \frac{1}{2} \cdot CC' \cdot m_c = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot m_c. \quad \text{Mivel } f \parallel AD \parallel CC' \quad \text{és} \quad F \text{ felezi } CB\text{-t, az } FF' \text{ középvonal } CC'B\Delta\text{-}$$

ben, ezért f felezi m_c -t: $m_c = 2HH' \Rightarrow t_{CC'B} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot HH' \cdot 2 = t_{G'GHH'}$. Az aláhúzottakból:

$$t_{ADHG} = t_{ABCD}.$$

1533. Legyen E a BC szár felezőpontja. $AF = FD$ és $BE = EC \Rightarrow FE$ a trapéz középvonala,

e ezért felezi a trapéz magasságát, illetve $FECD$ és $ABEF$ is trapéz. $t_{FBC} = t_{FBE} + t_{FCE} = \frac{1}{2} \cdot FE \cdot \frac{m}{2} +$

1532.

$$+ \frac{1}{2} \cdot FE \cdot \frac{m}{2} = \frac{1}{2} \cdot FE \cdot m = \frac{1}{2} \frac{AB + CD}{2} \cdot m = \frac{1}{2} t_{ABCD}.$$

1534. Legyen M az átlók metszéspontja. $AM = MC \Rightarrow t_{ADM} = t_{CDM}$, illetve $t_{ABM} = t_{CBM}$, mert egy-egy oldaluk és az ahhoz tartozó magasságuk egyenlő. $\Rightarrow t_{ABD} = t_{ADM} + t_{ABM} = t_{CDM} + t_{CBM} = t_{DBC}$.

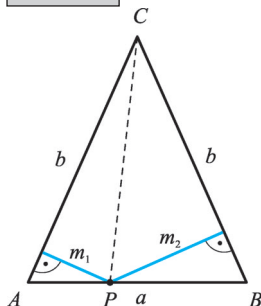
1535. $AF = FB$; CF súlyvonal $\Rightarrow t_{AFC} = t_{BFC} \Rightarrow d(A; e(C; F)) = d(B; e(C; F)) \Rightarrow t_{APC} = t_{BPC}$.

1527. A körívszakaszokból álló rész egy körgyűrű része, amit a közös kezdőpontból induló sugarak vágnak ki. Területe egyenesen arányos a középponti szöggel.

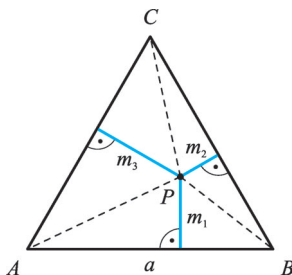
$$t = \frac{r_1^2 \hat{\alpha}}{2} - \frac{r_2^2 \alpha}{2} = \frac{(r_1^2 - r_2^2)}{2} \hat{\alpha} = (r_1 - r_2)(r_1 + r_2) \frac{\hat{\alpha}}{2} = (r_1 - r_2) \cdot \frac{(r_1 + r_2) \hat{\alpha}}{2} = d \cdot r_3 \cdot \hat{\alpha}, \quad \text{ahol } r_3 \cdot \hat{\alpha} \text{ a középkör ívének}$$

hossza. \Rightarrow Az úttest területe $10 \text{ m} \cdot 310 \text{ m} = \underline{\underline{3100 \text{ m}^2}}$.

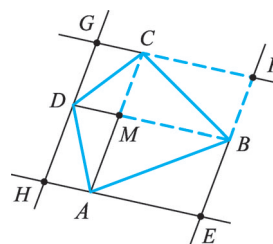
1536.



1537.



1538.



1536. Bontsuk fel az $ABC\Delta$ -et a PC egyenessel két háromszögre! m_1 az $APC\Delta$ AC -hez, m_2 a $BPC\Delta$ BC -hez tartozó magassága. $T_{ABC} = \frac{b \cdot m_b}{2} = \frac{b \cdot m_1}{2} + \frac{b \cdot m_2}{2} \Rightarrow m_b = m_1 + m_2$.

1537. Bontsuk fel a szabályos háromszöget a PA, PB, PC szakaszokkal három darab háromszögre! $T_{ABC} = T_{APB} + T_{BPC} + T_{APC} \Rightarrow \frac{a \cdot m}{2} = \frac{a \cdot m_1}{2} + \frac{a \cdot m_2}{2} + \frac{a \cdot m_3}{2} \Rightarrow m = m_1 + m_2 + m_3$. A három távolság összege a háromszög magasságával egyenlő, ami P -től függetlenül állandó.

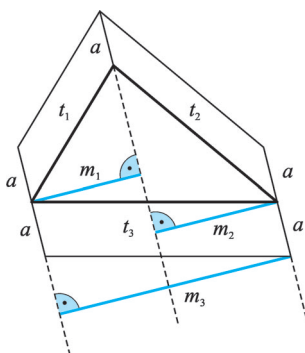
1538. $GH \parallel CA \parallel EF$ és $EH \parallel DB \parallel GF \Rightarrow DMCG; CMBF; HAMD$ és $AEBM$ paralelogramma $\Rightarrow t_{MCD} = \frac{1}{2}t_{DMCG}; t_{CMB} = \frac{1}{2}t_{MBFC}; t_{MDA} = \frac{1}{2}t_{HAMD}; t_{ABM} = \frac{1}{2}t_{AEBM} \Rightarrow t_{ABCD} = \frac{1}{2}t_{EFGH}$.

1539. $t_1 + t_2 = a \cdot m_1 + a \cdot m_2 = a \cdot (m_1 + m_2) = a \cdot m_3 = t_3$.

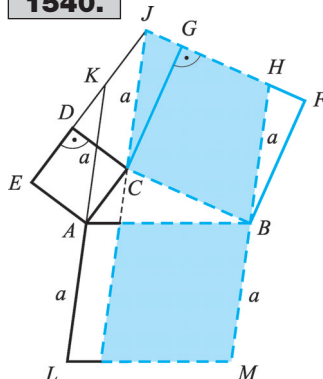
1540. $t_{ACDE} = t_{ACKJ}$ illetve $t_{CBFG} = t_{CBHJ}$, mert közös egy-egy oldaluk és a hozzá tartozó magasságuk. Az 1539. feladatban láttuk, hogy $t_{ACKJ} + t_{CBHJ} = t_{ABML}$. A fenti egyenlőségeket felhasználva: $t_{ACDE} + t_{CBFG} = t_{ABML}$.

1541. $m_1 + m_2 = m_3 + m_4 \Rightarrow t_1 + t_2 = am_1 + am_2 = a(m_1 + m_2) = a(m_3 + m_4) = am_3 + am_4 = t_3 + t_4$.

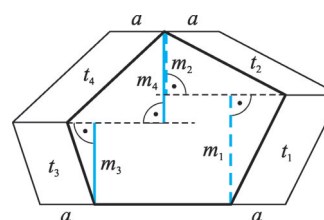
1539.

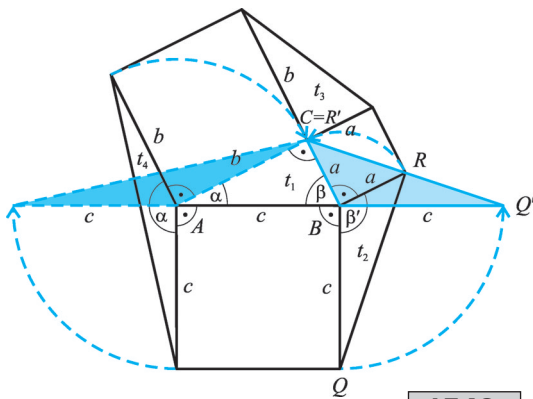


1540.

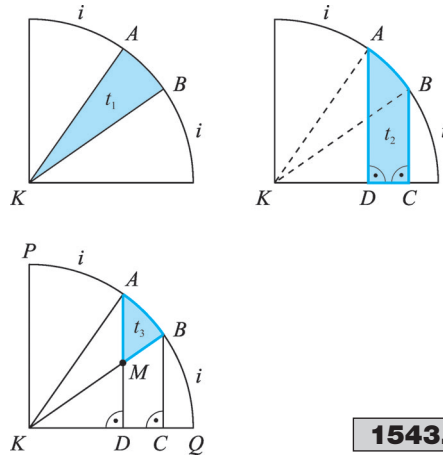


1541.





1542.



1543.

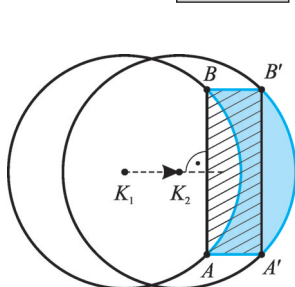
1542. ① $t_1 = \frac{1}{2}ab = t_3$. ② Forgassuk el a $BQR\Delta$ -et B körül $+90^\circ$ -kal $\rightarrow BQ'R\Delta \Rightarrow t_{BQ'R} = t_{ABC} = t_1$, mert egy-egy oldaluk egyenlő és a hozzá tartozó magasságuk közös. ③ Hasonlóan láthatjuk be a negyedik háromszög területének az eredetivel való egyenlőségét.

1543. $PKA\angle = BKQ\angle$, mert i -hez tartozó középponti szögek és $PKA\angle = KAD\angle$, mert váltószögek. $\Rightarrow KAD\angle = BKQ\angle$, valamint $KA = KB \Rightarrow AKD\Delta \cong BKC\Delta$ (derékszögben is egyeznek) $\Rightarrow t_{AKD} = t_{BKC}$; $t_{AKM} = t_{AKD} - t_{KMD} = t_{BKC} - t_{KDM} = t_{MDCB} \Rightarrow t_1 = t_{AKM} + t_3 = t_{MDCB} + t_3 = t_2$.

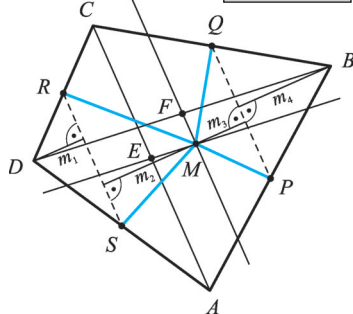
1544. Az AB húr és az AB ív határol egy körszeletet, ami egybevágó, tehát egyenlő területű az $A'B'$ húr és az $A'B'$ ív által határolt körszelettel. \Rightarrow Az $AA'B'B$ téglalap területe egyenlő az AB ív által sűrt területtel.

1545. $RS = \frac{1}{2}AC = PQ$, mert RS és PQ középvonal. $t_{RDSM} + t_{QMPB} = t_{RDS} + t_{RSM} + t_{MQP} + t_{QPB} = \frac{1}{2} \cdot RS \cdot m_1 + \frac{1}{2} \cdot RS \cdot m_2 + \frac{1}{2} \cdot QP \cdot m_3 + \frac{1}{2} \cdot QP \cdot m_4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot AC \cdot (m_1 + m_2 + m_3 + m_4) = \frac{1}{2} t_{ABCD}$; $m_1 + m_2 = m_3 + m_4$ miatt $t_{RDSM} = t_{QMPB} = \frac{1}{4} t_{ABCD}$. Hasonlóan belátható, hogy $t_{CRMQ} = t_{ASMP} = \frac{1}{4} t_{ABCD}$.

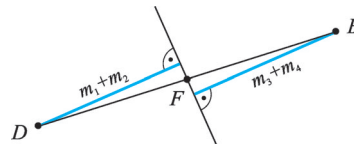
1544.



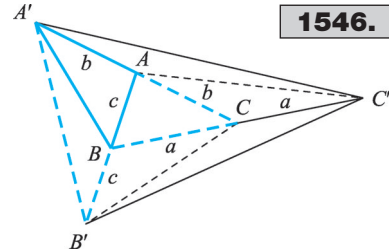
1545/I.



1545/II.

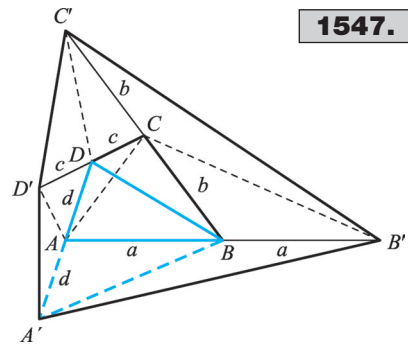


1546. AB súlyvonal $A'BC\Delta$ -ben $\Rightarrow t_{A'AB} = t_{ABC}$ és $A'B$ súlyvonal $A'BA\Delta$ -ben $\Rightarrow t_{A'B'B} = t_{A'BA}$. AC súlyvonal $ABC'\Delta$ -ben $\Rightarrow t_{ABC} = t_{ACC'}$ és AC' súlyvonal $A'CC'\Delta$ -ben $\Rightarrow t_{A'AC'} = t_{ACC'}$. BC súlyvonal $AB'C\Delta$ -ben $\Rightarrow t_{ABC} = t_{B'BC}$ és $B'C$ súlyvonal $B'BC'\Delta$ -ben $\Rightarrow t_{B'BC} = t_{B'CC'}$. A fenti egyenlőségekből következik, hogy $t_{ABC} = t_{AA'B} = t_{A'B'B} = t_{BB'C} = t_{B'CC'} = t_{ACC'} = t_{A'AC'} \Rightarrow t_{A'B'C'} = \underline{\underline{7t_{ABC}}}$.



1546.

1547. AB súlyvonal $DBA'\Delta$ -ben és $A'B$ súlyvonal $AA'B'\Delta$ -ben $\Rightarrow t_{ADB} = t_{AA'B} = t_{A'BB'}$. CB súlyvonal $ACB'\Delta$ -ben és CB' súlyvonal $BB'C'\Delta$ -ben $\Rightarrow t_{ABC} = t_{BB'C} = t_{CC'B'}$. DC súlyvonal $BC'D\Delta$ -ben és DC' súlyvonal $CC'D'\Delta$ -ben $\Rightarrow t_{BDC} = t_{DCC'} = t_{DD'C'}$. AD súlyvonal $AD'C\Delta$ -ben és AD' súlyvonal $A'D'D\Delta$ -ben $\Rightarrow t_{ADC} = t_{ADD'} = t_{AA'D'}$. A fenti egyenlőségekből következik, hogy $t_{A'B'C'D'} = t_{ABCD} + t_{AA'B'} + t_{BB'C'} + t_{CC'D'} + t_{DD'A'} = t_{ABCD} + 2t_{ADB} + 2t_{ABC} + 2t_{BDC} + 2t_{ADC} = t_{ABCD} + 2t_{ABCD} + 2t_{ABCD} = \underline{\underline{5t_{ABCD}}}$.



1547.

1548. $PQ = QR = RC$. AQ súlyvonal $APR\Delta$ -ben és AR súlyvonal $AQC\Delta$ -ben $\Rightarrow t_{APQ} = t_{AQR} = t_{ARC}$. BQ súlyvonal $BPR\Delta$ -ben és BR súlyvonal $BQC\Delta$ -ben $\Rightarrow t_{BPQ} = t_{BQR} = t_{BRC}$. A fenti egyenlőségekből következik, hogy

$$t_{ABQ} = t_{APQ} + t_{PBQ} = \frac{1}{3} t_{APC} + \frac{1}{3} t_{BPC} = \frac{1}{3} t_{ABC}.$$

1549. Legyen M az átlók metszéspontja. $t_1 = t_2 \Rightarrow AM = MC$, mert $ABM\Delta$ AM -hez tartozó magassága egyenlő $CBM\Delta$ CM -hez tartozó magasságával. Hasonlóan belátható, hogy $t_2 = t_3 \Rightarrow BM = MD$. Ha egy négyszög átlói felezik egymást, akkor a négyszög paralelogramma.

1550. A négyzet tengelyesen szimmetrikus AC -re, így tetszőleges $P \in AC$ esetén $PD = PB \Rightarrow t_{PDC} = t_{BPC}$; $t_{ABPD} = 2t_{APB}$ szintén a szimmetria miatt. A szerkesztendő P pontra: $2t_{APB} = t_{PBC} \Rightarrow 2AP = PC$, mert a magasság egyenlő $\Rightarrow P$ az AC átló A -hoz közelebbi harmadolópontja.

1551. $AE_1C\Delta$ -nek, $E_1E_2C\Delta$ -nek és $E_2BC\Delta$ -nek közös a C -ből induló magassága és egyenlő a C -vel szemközti oldala, ezért területük is egyenlő. $\Rightarrow t_{AE_1C} = \frac{1}{3} t_{ABC}$. E_1F súlyvonal az $AE_1C\Delta$ -

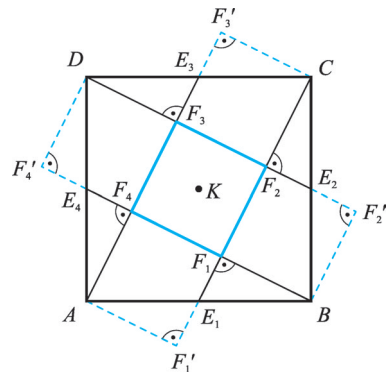
$$\text{ben } \Rightarrow t_{AE_1F} = \frac{1}{2} t_{AE_1C} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} t_{ABC} = \underline{\underline{\frac{1}{6} t_{ABC}}}$$

1552. Tükrözzük F_i -t E_i -re $\Rightarrow F'_i$. K középpont körüli 90° -os forgásszimmetria miatt $F_1F_2F_3F_4$ négyzet, és egybevágó a többi kis négyzettel. $\Rightarrow t_{ABCD} =$

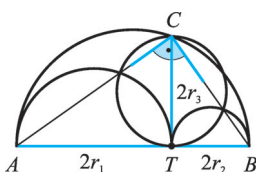
$$= t_{AF_1F_1BF_2F_2CF_3F_3DF_4F_4} = 5t_{F_1F_2F_3F_4} \Rightarrow t_{F_1F_2F_3F_4} = \underline{\underline{\frac{1}{5} t_{ABCD}}}$$

1553. Felhasználjuk, hogy az ABC derékszögű háromszögben Pitagorasz tétele szerint $a^2 + b^2 - c^2 = 0$.

$$\begin{aligned} t_1 + t_2 &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 \pi + \frac{1}{2} ab - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{c}{2}\right)^2 \pi = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \frac{1}{4} (a^2 + b^2 - c^2) + \frac{1}{2} ab = \frac{1}{2} ab = t_{ABC}. \end{aligned}$$



1552.

1554.

1554. Thalész tétele szerint $\angle ACB = 90^\circ$. Az ABC derékszögű háromszögben a magasságtétel miatt: $(2r_3)^2 = 2r_1 \cdot 2r_2 \Rightarrow r_3^2 = r_1 \cdot r_2 \Rightarrow \Rightarrow t_1 = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)^2 \cdot \pi - \frac{1}{2}r_1^2 \pi - \frac{1}{2}r_2^2 \pi = \frac{1}{2} \pi \cdot 2r_1 r_2 = \pi \cdot r_3^2 = t_2$.

1555. Az a, b, c oldalak fölé írt hasonló sokszögek területe $t_a; t_b; t_c$. A derékszögű háromszögben Pitagorasz tétele szerint: $\frac{a^2 + b^2}{c^2} = 1$.

A hasonlóság miatt: $t_a : t_b : t_c = a^2 : b^2 : c^2 \Rightarrow t_a = t_c \cdot \frac{a^2}{c^2}$ és $t_b = t_c \cdot \frac{b^2}{c^2} \Rightarrow t_a + t_b = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = t_c$.

1556. Az 1555. feladatból tudjuk, hogy ha a két adott szabályos háromszög oldala egy derékszögű háromszög két befogója, akkor az átfogóra emelt szabályos háromszög területe egyenlő lesz a két adott háromszög területének összegével.

1557. Jelöljük a harmadik oldalhoz tartozó magasságot m -mel. A keletkezett derékszögű háromszögekre az 1555. feladatból következik: $t_1 = t_3 + m^2$ és $t_2 = t_4 + m^2 \Rightarrow t_1 - t_3 = m^2 = t_2 - t_4$. Ha a háromszög derékszögű, akkor t_3 vagy t_4 0 is lehet, az állítás ekkor is igaz.

1558. A szögek egyenlősége miatt $AT_c C \Delta \sim BT_b A \Delta \Rightarrow AC : AT_c = BA : AT_b \Rightarrow b : c_2 = c : b_2 \Rightarrow \Rightarrow bb_2 = cc_2 \Rightarrow$ A színezett téglalapok területe egyenlő.

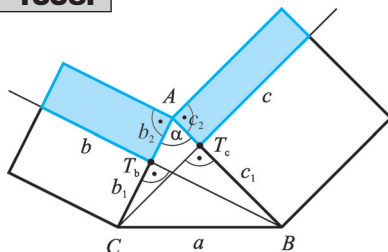
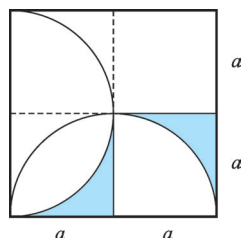
1559. Legyen a négyzet oldala $2a$, ekkor területe $4a^2$. A_2 területet a $2a$ sugarú negyedkör és az a sugarú félkör területével fejezzük ki: $t_2 = \frac{1}{4} \cdot (2a)^2 \pi - 2 \cdot \frac{1}{2} a^2 \pi + t_1 = t_1$. Az ábrán a színezett síkidomok egybevágók. $\Rightarrow t_3 = a^2 = \frac{1}{4} t_{\text{négyzet}}$

1560. Legyen az AB oldallal párhuzamos e egyenesre $AC \cap e = A_1$ és $BC \cap e = B_1$. $AB \parallel e \Rightarrow \Rightarrow CA_1 B_1 \Delta \sim CAB \Delta \Rightarrow t_{CA_1 B_1} = \lambda^2 \cdot t_{ABC} = \frac{1}{2} t_{ABC} \Rightarrow \lambda = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow CA_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} CA$ és

$CB_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} CB$ (CA_1 egy olyan derékszögű háromszög befogója, aminek átfogója CA).

1561. Pitagorasz tétele alapján az adott négyzetek oldalaiból derékszögű háromszöget szerkesztünk, amelynek átfogója a nagyobb négyzet oldala, egyik befogója a kisebb négyzet oldala. A keresett négyzet oldala a derékszögű háromszög másik befogója.

1562. A szerkesztendő négyzet oldala b ; $t_1 = a^2$ és $t_2 = b^2 = \frac{1}{3} a^2 = \frac{1}{3} \cdot a \cdot a$. A magasságtétel alapján b szakasz hossza megszerkeszthető egy $\left(a + \frac{1}{3} a\right)$ átfogójú derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magasságaként.

1558.**1559.**

1563. Az adott négyzet oldala a ; területe $t_1 = a^2$; $t_2 + t_3 = t_1 \Rightarrow (b-x)^2 + x^2 = a^2 \Rightarrow$ Pitagorasz tétele alapján derékszögű háromszöget keresünk, aminek átfogója a , befogóinak összege pedig b . Forgassuk le a szerkesztendő $ABC\Delta$ $AC = x$ befogóját az AB befogó egyenesére $\Rightarrow D$ pont, és $DB = DA + AB = x + b - x = b$. $AC = AD \Rightarrow \angle ADC = 45^\circ$; $b > a$. A szerkesztés: ① $DB = b$. ② D -ben 45° DB -re. ③ B középpontú, a sugarú kör. ④ A kör és a szög szárának metszéspontja C . ⑤ C merőleges vetülete DB -re A . 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

1564. Bármely két kör hasonló, ezért $\frac{t'}{t} = 2 = \lambda^2$ miatt $\frac{r'}{r} = \lambda = \sqrt{2} \Rightarrow r' = \sqrt{2} r$ alapján r' szerkeszthető.

1565. Ha a körgyűrű területe egyenlő a belső kör területével, akkor $\frac{t'}{t} = \frac{1}{2}$. A körök hasonlósága miatt $\lambda^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{r'}{r} \Rightarrow r' = \frac{r}{\sqrt{2}}$ alapján r' szerkeszthető.

1566. Az adott csúccsal szemközti oldalt n darab egyenlő hosszúságú szakaszra osztjuk, és az osztópontokat összekötjük C -vel. Az így kapott kis háromszögek egy-egy oldala és az ehhez tartozó magassága egyenlő, így területük is egyenlő.

1567. AC átló felezi az $ABCD$ paralelogramma területét. Osszuk n darab egyenlő hosszúságú szakaszra BC -t és DC -t, az osztópontokat kössük össze A -val (C -t is). Így $2n$ darab egyenlő területű kis háromszöget kapunk. B -ből indulva minden második osztópontot tartsunk meg, így n darab egyenlő területű síkidomot kapunk. (Ha n páros, akkor háromszögek, ha n páratlan, akkor $(n-1)$ darab háromszög és egy négyszög.)

1568. CF súlyvonal, ezért $t_{AFC} = t_{BFC}$. Osszuk AC -t, illetve BC -t három-három egyenlő hosszú szakaszra! FP_1 ; FP_2 ; FC ; FQ_2 ; FQ_1 az $ABC\Delta$ -et hat egyenlő területű háromszögre bontja. $\Rightarrow t_{AFP_2} = t_{P_2FQ_2C} = t_{Q_2FB}$.

1569. AE súlyvonal felezi az $ABC\Delta$ területét. AE E -hez közelebbi P harmadolópontját B -vel, illetve C -vel összekötő szakaszok az $ABE\Delta$, illetve az $AEC\Delta$ területét 2 : 1 arányban osztják. $\Rightarrow t_{APC} = t_{ABP} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} t_{ABC} = \frac{1}{3} t_{ABC} \Rightarrow t_{PBC} = \frac{1}{3} t_{ABC}$. A megoldás a háromszög súlypontja.

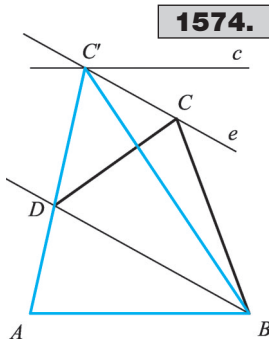
1570. Legyen a háromszög átfogója $2b$, befogója a . Pitagorasz tételét alkalmazva: $a^2 = 2b^2$; $t_2 = \frac{1}{2} b^2 \pi + t_1 - \frac{1}{4} a^2 \pi = \frac{1}{2} b^2 \pi + t_1 - \frac{1}{4} \cdot 2b^2 \pi = t_1$.

1571. A szerkesztés: ① AB -vel párhuzamos C -n át: e . ② AB -re A -ban adott α' szög $\rightarrow b'$. ③ $b' \cap e = C'$. $t_{ABC'} = t_{ABC}$, mert AB és a hozzá tartozó magasság közös.

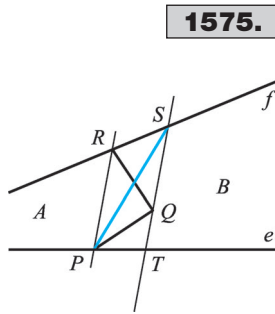
1572. Legyen DB a paralelogramma és a rombusz egyenlő átlója. Legyen $c \parallel e(D; B)$. Tet-szőleges $C' \in c$ esetén $t_{DBC'} = t_{DBC} \Rightarrow t_{ABCD} = t_{A'B'C'D}$. A szerkesztés: ① DB felezőmerőlegese: f . ② DB -vel párhuzamos C -n át: c . ③ DB -vel párhuzamos A -n át: a . ④ $f \cap c = C'$ és $f \cap a = A' \rightarrow A'B'C'D$ rombusz. ⑤ Ha az 1–4. lépéseket AC átlóból kiindulva végrehajtjuk, $AB'CD'$ rombuszhoz jutunk. 1 vagy 2 megoldás lehet.

1573. Ha két paralelogramma egyik oldala és az ahhoz tartozó magassága egyenlő, akkor területük egyenlő. A szerkesztés: ① A középpontú, AB sugarú kör: k . ② $k \cap e(D; C) = D'$. ③ A -t tükrözzük BD' felezőpontjára: $C' \rightarrow ABC'D'$ rombusz. ④ A középpontú, AD sugarú kör: l . ⑤ $l \cap e(B; C) = B''$. ⑥ A -t tükrözzük $B''D$ felezőpontjára: $C'' \rightarrow ABC''D''$ rombusz. 2, 3 vagy 4 megoldás lehet.

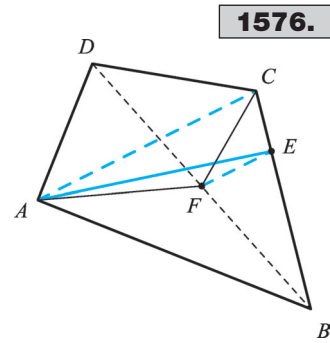
I



1574.



1575.



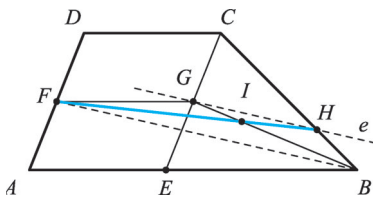
1576.

1574. Felhasználjuk, hogy $BCC'D$ trapézban $t_{BDC} = t_{BDC'}$. A szerkesztés: ① BD -vel párhuzamos C -n át: e . ② $e \cap e(A; D) = C' \rightarrow ABC'\Delta$ ($t_{ABC'} = t_{ABCD}$). ③ C' -n át párhuzamos AB -vel: c . ④ Bármely $C'' \in c$ esetén $ABC''\Delta$ is megoldás. A négyszög bármely oldalából indulunk ki, végtelen sok megoldás van.

1575. Felhasználjuk, hogy $PRST$ trapézban $PQR\Delta$ területe egyenlő $PRS\Delta$ területével. $\Rightarrow t_A$ nem változik, ha $PQR\Delta$ helyett $PRS\Delta$ tartozik az A síkidomhoz. Hasonlóan: $t_{TSP} = t_{TPQ} + t_{QPS} = t_{TPQ} + t_{QRS} \Rightarrow t_B$ nem változik, ha $TPQ\Delta$ és $QRS\Delta$ helyett $TSP\Delta$ tartozik a B síkidomhoz.

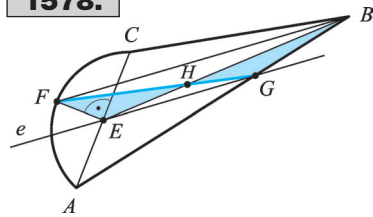
A szerkesztés: ① Q ponton át párhuzamos PR egyenessel: t . ② $t \cap e = T$ és $t \cap f = S$. ③ PS vagy RT egyenese jelöli ki az új határvonalat. 2 megoldás van.

1577.



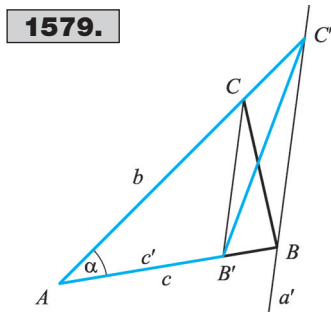
1576. Az $ABCD$ négyszög DB átlójának F felezőpontját A -val és C -vel összekötő szakaszok súlyvonalak. $\Rightarrow t_{ADF} = t_{ABF}$ és $t_{CDF} = t_{CBF} \Rightarrow t_{ADCF} = t_{AFCB}$. Legyen $FE \parallel AC!$ $t_{AFC} = t_{AEC} \Rightarrow t_{ADCF} = t_{ADCE} \Rightarrow AE$ két egyenlő területű darabra vágja az $ABCD$ -t. Ha $F \in AC$, akkor $ABCD$ deltoid, ezért az AC átló lehet a megoldás.

1578.



1577. 1. eset: $AB > CD$. Felhasználjuk: Ha $CE \parallel AD$, illetve $CG = GE$, akkor $AECD$ paralelogramma és az FG középvonal felezi a paralelogramma területét, illetve GB súlyvonal és felezi az $EBC\Delta$ területét. $\Rightarrow t_{AFGB} = t_{FDCBG}$. Ha $GH \parallel FB$, akkor $t_{FBG} = t_{FBH} \Rightarrow t_{FIG} = t_{GHI} \Rightarrow t_{EABH} = t_{FHCD} \Rightarrow FH$ a keresett egyenes. A szerkesztés: ① C -n át párhuzamos DA -val $\rightarrow E \in AB$. ② CE felezőpontja: G . ③ G -n át párhuzamos FB -vel: e . ④ $e \cap BC = H \rightarrow FH$ a megoldás.

1579.

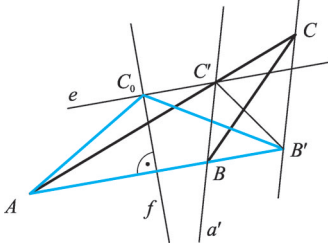


2. eset: Ha $AB = CD$, akkor $ABCD$ trapéz paralelogramma. $\Rightarrow A$ középvonal egyenese a megoldás.

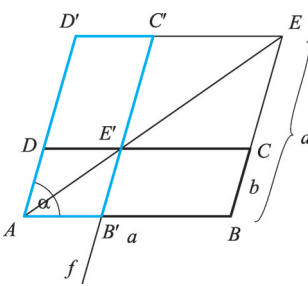
1578. $AE = EC \Rightarrow FE \perp AC \Rightarrow FE$ felezi az ACF körselet területét. BE súlyvonal, ezért felezi az $ABC\Delta$ területét. Legyen $FB \parallel EG!$ $\Rightarrow t_{FEB} = t_{FGB}$, valamint $t_{FEH} = t_{HGB} \Rightarrow FG$ a keresett egyenes. A szerkesztés: ① AC húr felezőpontja: E . ② AC ív felezőpontja: F . ③ E -n át párhuzamos BF -vel: e . ④ $e \cap e(A; B) = G \rightarrow FG$ a megoldás.

1579. A szerkesztés: ① $AB' = c'$. ② CB' -vel párhuzamos B -n át: a' . ③ $a' \cap e(A; C) = C'$. A szerkesztésből adódik, hogy a $B'BC'C$ négyszög trapéz $\Rightarrow t_{B'C'C} = t_{B'BC}$ ($B'C$ oldaluk és az ehhez tartozó magasságuk közös) $\Rightarrow t_{AB'C'} = t_{AB'C} + t_{B'C'C} = t_{AB'C} + t_{B'BC} = t_{ABC}$. Egyértelmű a megoldás.

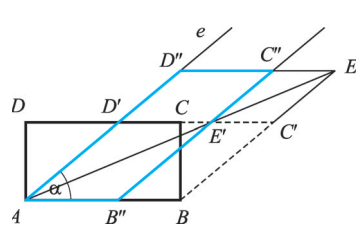
1580.



1581.



1582.



1580. Az 1579. feladatban láttuk, hogy ha $BC' \parallel B'C$, akkor $t_{AB'C'} = t_{ABC}$. Tetszőleges $P \in e$ esetén $t_{APB} = t_{AC'B}$. A szerkesztés: ① $e(A; B)$ -re adott c' alap: AB' . ② $B'C'$ -vel párhuzamos B ponton át: a' . ③ $a' \cap e(A; C) = C'$. ④ C' -n át párhuzamos AB -vel: e . ⑤ AB' felezőmerőlegese: f . ⑥ $f \cap e = C_0 \Rightarrow AB'C_0\Delta$ a megoldás. Egyértelmű a megoldás.

1581. ① Szerkesztjük meg az a, b oldalú α szögű $ABCD$ paralelogrammához az a, d oldalú α szögű $ABED'$ paralelogrammát. ② $e(A; E) \cap e(C; D) = E'$. ③ Az E' ponton át AD -vel húzott párhuzamos: f . ④ $f \cap e(A; B) = B'$ és $f \cap e(D'; E) = C'$. A szerkesztésből adódik, hogy $AB'E'D'$; $B'BCE'$; $E'CEC'$; $DE'C'D'$ négyszögek paralelogrammák. Felhasználva, hogy a paralelogramma átlója felezi a területet: $t_{B'BCE'} = t_{ABE} - t_{AB'E'} - t_{E'CE} = t_{AD'E} - t_{ADE'} - t_{E'CE} = t_{DE'C'D'}$. A fenti egyenlőséget felhasználva: $t_{AB'C'D'} = t_{AB'E'D'} + t_{DE'C'D'} = t_{AB'E'D'} + t_{B'BCE'} = t_{ABCD}$. Tehát az $AB'C'D'$ paralelogramma a megoldás. A b, d oldalú α szögű paralelogrammából kiindulva $AB'C'D'$ -vel egybevágó megoldáshoz jutunk.

1582. A szerkesztés: ① AB -re A -ban α szög \rightarrow szára e . ② $e \cap DC = D' \rightarrow ABC'D'$ paralelogramma ($t_{ABCD} = t_{ABC'D'}$). ③ adott szögű és oldalú $ABC'D'$ -vel egyenlő területű paralelogramma: $AB''C''D''$ (lásd az 1581. feladat megoldásában látott eljárást).

1583. A szerkesztés: ① $ABC\Delta$ AB -vel párhuzamos középvonalának egyenese: k . ② A -ban merőleges AB -re: a . ③ B -ben merőleges AB -re: b . ④ $a \cap k = Q$ és $b \cap k = P \Rightarrow ABPQ$ téglalap ($t_{ABPQ} = t_{ABC}$). ⑤ adott oldalú $ABPQ$ -val egyenlő területű téglalap $\rightarrow AB'P'Q'$ (lásd az 1581. feladat megoldásában látott eljárást).

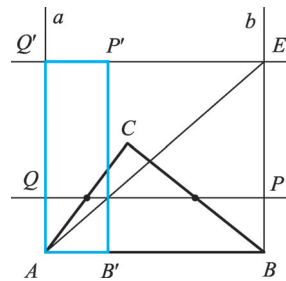
1584. Felhasználjuk: Bármely két szabályos háromszög, illetve bármely két négyzet hasonló.

Induljunk ki egy tetszőleges (b' oldalú) szabályos háromszögből és szerkesszünk egy vele egyenlő területű (a' oldalú) négyzetet. A szerkesztés: ① A $PQR\Delta$ -gel egyenlő területű $PQST$ téglalap szerkesztése: $a) PQR\Delta$ PQ -val párhuzamos középvonalának egyenese $\rightarrow e(F; G)$. $b) P$ -ben, illetve Q -ban PQ -ra állított merőlegesek kimetszik $e(F; G)$ -ből a T és S pontokat ($t_{PQR} = 1/2 \cdot b' \cdot 2c' = b' \cdot c' = t_{PQST}$). ② A $PQST$ téglalappal egyenlő területű négyzet szerkesztése:

$a) t_{PQST} = b' \cdot c' = (a')^2 = t_{négyzet} \Rightarrow a'$ szakasz a b' és c' szakaszok mértani közepe.

$b) a'$ a magasságtétel segítségével szerkeszthető (lásd az ábrát). Amilyen arányú hasonlóság viszi az a' oldalú négyzetet az adott négyzetbe, olyan arányú hasonlóságot alkalmazunk a b' oldalú szabályos háromszögre, és így a keresett háromszöget kapjuk.

1583.



1584.

